ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 3. ფუნქციები

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემულია სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [1] სალექციო კურსიდან, კერძოდ ლექცია 3-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [1]-ში.

სავარჯიშოები №

Type equation here.

2-ა,ვ	2-დ,ზ	3-ა,გ	3-დ,ვ	4-ა,გ	4-ბ,დ	6-ა	6-ბ	7-ა,გ	7-ბ,დ
9-ა,გ	9-ბ,დ	10-ა	10-ბ	11-ა	11-ბ,გ	13-ა,გ	14-ა,ბ,გ	15-ა	15-ბ,გ
17-ა, დ,ვ	17-ბ,ე, ზ	18	20-ა,გ	20-ბ,დ					

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

2-ა.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის განსაზღვრის არე:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}}$$

ამოხსნა.
ცხადია, რომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა იმ x წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც $\boldsymbol{x^2 - 1 \neq 0}$**.** ე.ი. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე $R\backslash\{-1,1\}$.

პასუხი: $R\backslash\{-1,1\}$.

2-ვ.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის განსაზღვრის არე:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{9-x} \ - \frac{3}{\sqrt{x-3}}}$$

ამოხსნა.
ცხადია, რომ მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა იმ x წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც: $\boldsymbol{9 - x \geq 0}$ და $\boldsymbol{x - 3 > 0}$**.**
ე.ი. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა (3,9] შუალედი.

პასუხი: (3,9].

3-ა.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x^2 + 1}}$$

ამოხსნა. ცხადია, რომ $\boldsymbol{\sqrt{x^2 + 1} = y}$ განტოლებას აქვს ამონახსნი ნებისმიერი $\boldsymbol{y \geq 1}$ რიცხვისთვის. ე.ი. მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1, +\infty)$.

პასუხი: $[1, +\infty)$.

3-გ.
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

$$\boldsymbol{y = \sqrt{x\,(4 - x)}}$$

ამოხსნა.
ცხადია, რომ $\boldsymbol{\sqrt{x\,(4 - x)} = y}$ ტოლობას აქვს აზრი, თუ $y \geq 0$. ამასთან, $\boldsymbol{\sqrt{x\,(4 - x)} = y}$ განტოლება ტოლფასია $x^2 - 4x - y^2 = 0$ განტოლების. ამ განტოლებას კი ამონახსნი აქვს, თუ მისი დისკრიმინანტი, ანუ $16 - 4y^2 \geq 0$.
ე.ი. გვაქვს: $y \geq 0$ და $16 - 4y^2 \geq 0$, საიდანაც ვღებულობთ: $0 \leq y \leq 2$.
ე.ი. მოცემული ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0,2]$.

პასუხი: $[0,2]$.

4-ა.
იპოვეთ $f(g(x))$:

$$\boldsymbol{f(u)} = 3\mathrm{u}^2 + 2\mathrm{u} - 6, \mathrm{g(x)} = \mathrm{x} + 2$$

ამოხსნა.
$f(g(x)) = f(x + 2) = 3(\mathrm{x} + 2)^2 + 2(\mathrm{x} + 2) - 6 = 3\mathrm{x}^2 + 14\mathrm{x} + 10$

პასუხი: $3\mathrm{x}^2 + 14\mathrm{x} + 10$

4-გ.
იპოვეთ $f(g(x))$:

$$\boldsymbol{f(u)} = (u - 1)^3 + 2\mathrm{u}^2, g(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1$$

ამოხსნა.
$\boldsymbol{f}(g(\mathrm{x})) = \boldsymbol{f}(\mathrm{x} + 1) = ((x + 1) - 1)^3 + 2(\mathrm{x} + 1)^2 = x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

პასუხი: $x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

6-ა.
იპოვეთ $f(f(x))$, $f(g(x))$,$g\ (f(x))$ და $g(g(x))$, თუ

$$\boldsymbol{f(u)} = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ u, & u > 0 \end{cases}, \qquad g(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

ამოხსნა.

$$\boldsymbol{f}(f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq 0 \\ f(x), & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} = f(x)$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0, & g(x) \leq 0 \\ g(x), & g(x) > 0 \end{cases}$$

ცხადია, რომ $\{x|\ g(x) > 0\} = \emptyset$,ამიტომ გვექნება:

$f(g(x)) = 0$

$$g\ (f(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq 0 \\ -(f(x))^2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$

$$g(g(x)) = \begin{cases} 0, & g(x) \leq 0 \\ -(g(x))^2, & g(x) > 0 \end{cases} = 0$$

პასუხი: $\boldsymbol{f}(f(x)) = f(x)$, $f(g(x)) = 0$, $g\ (f(x)) = g(\mathrm{x})$, $g(g(x)) = 0$

9-ა.
მოცემულია $p = D(x)$ მოთხოვნის ფუნქცია და $\mathrm{C}(x)$ მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია. იპოვეთ:

1) მთლიანი ამონაგების $\mathrm{R}(x)$ და მოგების $P(x)$ ფუნქციები;
2) x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წარმოება არის მომგებიანი, თუ

$$D(x) = -0{,}02x + 29,$$
$$\mathrm{C}(x) = 1.43x^2 + 18{,}3x - 15{,}6$$

ამოხსნა.

1) $\mathrm{R}(x) = x\ D(x) = -0{,}02x^2 + 29x$

$P(x) = \mathrm{R}(x) - \mathrm{C}(x) = -1.45x^2 + 10{,}7x + 15{,}6$

2) ცხადია, რომ წარმოება არის მომგებიანი, თუ $P(x) > 0$. $-1.45x^2 + 10{,}7x + 15{,}6 > 0$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $2 < x < 5{,}3$

პასუხი: 1) $\mathrm{R}(x) = -0{,}02x^2 + 29x$, $P(x) = -1.45x^2 + 10{,}7x + 15{,}6$
2) $2 < x < 5{,}3$

9-გ.
მოცემულია $p = D(x)$ მოთხოვნის ფუნქცია და $\mathrm{C}(x)$ მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია. იპოვეთ:

1) მთლიანი ამონაგების $\mathrm{R}(x)$ და მოგების $P(x)$ ფუნქციები;
2) x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წარმოება არის მომგებიანი, თუ

$$D(x) = -0{,}5x + 39,$$
$$\mathrm{C}(x) = 1.5x^2 + 9{,}2x + 67$$

ამოხსნა.

1) $\mathrm{R}(x) = x\ D(x) = -0{,}5x^2 + 39x$

$P(x) = \mathrm{R}(x) - \mathrm{C}(x) = -2x^2 + 29{,}8x - 67$

2) ცხადია, რომ წარმოება არის მომგებიანი, თუ $P(x) > 0$. $-2x^2 + 29{,}8x - 67 > 0$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ $3{,}32 < x < 11{,}58$

პასუხი: 1) $R(x) = -0{,}5x^2 + 39x$, $P(x) = -2x^2 + 29{,}8x - 67$
2) $3{,}32 < x < 11{,}58$

10-ა.

ცნობილია, რომ საწარმოს მიერ q პროდუქტის წარმოებისას მთლიანი დანახარჯი გამოითვლება $C(q)$ ფუნქციით, სადაც

$$C(q) = 0{,}01q^2 + 0{,}9q + 2$$

იპოვეთ 10 ერთეული პროდუქტის წარმოების მთლიანი დანახარჯი.

ამოხსნა.

$C(10) = 0{,}01 \cdot 10^2 + 0{,}9 \cdot 10 + 2 = 12$

პასუხი: 12

11-ა.

ცნობილია, რომ დროის საწყისი მომენტიდან მოსახლეობის რაოდენობა დროის t მომენტში იქნება $P(t) = 20 - \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{t+1}}$ ათასი.

იპოვეთ მოსახლეობის რაოდენობა 9 წლის შემდეგ.

ამოხსნა.

$P(9) = 20 - \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9+1}} = \mathbf{19,4}$

ე.ი. მოსახლეობის რაოდენობა 9 წლის შემდეგ იქნება 19,4 · 1000=19400

პასუხი: 19400

13-ა.

ბრაზილიური ყავის იმპორტიორი კომპანიის შეფასებით ადგილობრივი მომხმარებლის მიერ ყოველკვირეულად შეძენილი ყავის რაოდენობა დაახლოებით ტოლია $Q(p) = \frac{\mathbf{4375}}{p^2}$ კილოგრამის, სადაც p არის ერთი კილოგრამის ფასი ლარებში. გარკვეული გათვლებით დგინდება, რომ t კვირის შემდეგ ერთი კილოგრამი ყავის ფასი იქნება

$$p(t) = 0{,}04t^2 - 0{,}2t + 12$$

ლარი.

გამოსახეთ t პარამეტრის მეშვეობით ყავის ყოველკვირეული მოხმარების ფუნქცია.

ამოხსნა.

$$Q(p(t)) = Q(0{,}04t^2 - 0{,}2t + 12) = \frac{\mathbf{4375}}{(0{,}04t^2 - 0{,}2t + 12)^2}$$

პასუხი: $Q(t) = \frac{\mathbf{4375}}{(0{,}04t^2 - 0{,}2t + 12)^2}$

13-გ.

ბრაზილიური ყავის იმპორტიორი კომპანიის შეფასებით ადგილობრივი მომხმარებლის მიერ ყოველკვირეულად შეძენილი ყავის რაოდენობა დაახლოებით ტოლია $Q(p) = \frac{\mathbf{4375}}{p^2}$ კილოგრამის,

სადაც p არის ერთი კილოგრამის ფასი ლარებში. გარკვეული გათვლებით დგინდება, რომ t კვირის შემდეგ ერთი კილოგრამი ყავის ფასი იქნება

$$p(t) = 0{,}04t^2 - 0{,}2t + 12$$

ლარი.

დროის რა პერიოდის მერე გახდება ყავაზე მოთხოვნა 30,375 კილოგრამი?

ამოხსნა.

განვიხილოთ განტოლება:

$$Q(t) = \frac{\mathbf{4375}}{(0{,}04t^2-0{,}2t+12)^2} = \mathbf{30,375},$$

საიდანაც ვღებულობთ,რომ $t \approx 5$ $(t < 5)$. ე.ი. ყავაზე მოთხოვნა 30,375 კილოგრამი გახდება მე-5 კვირაში.

პასუხი: მე-5 კვირაში.

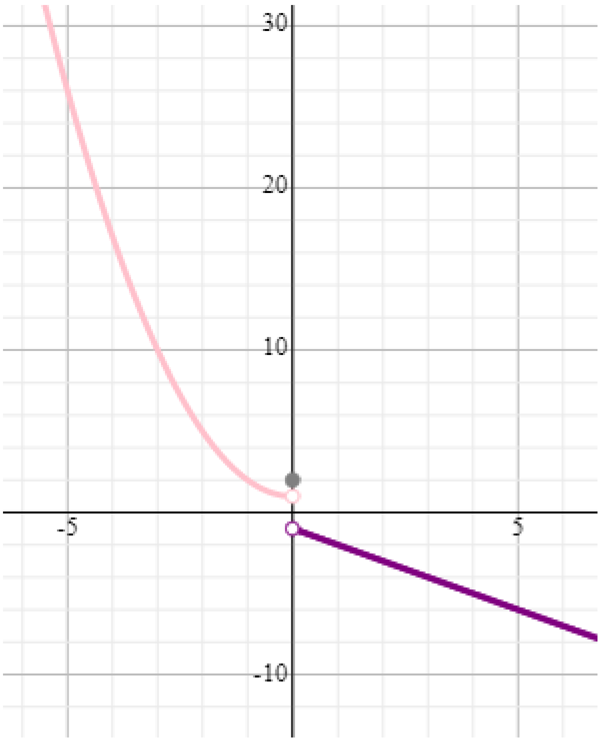
17-ა.

ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, \text{თუ} \;\; x<0 \\ -x-1, \text{თუ} \;\; x>0 \\ 2, \text{თუ} \;\; x=0 \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ $f([-1{,}0])$.

ამოხსნა.



როგორც ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს
$f([-1{,}0])$=(1,2]

პასუხი: (1,2]

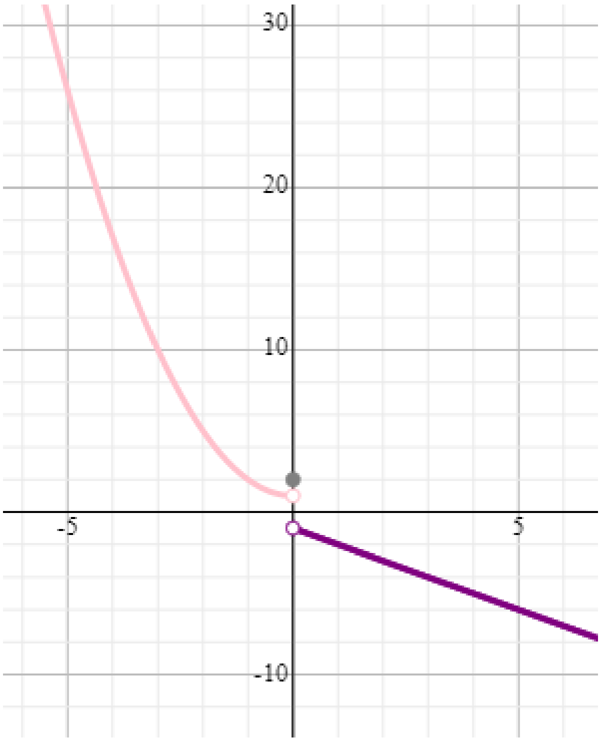
17-დ.

ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{თუ} \quad x<0 \\ -x-1, \text{თუ} \quad x>0 \\ 2, \text{თუ} \quad x=0 \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ $f^{-1}([0,10])$.

ამოხსნა.



როგორც ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს
$f^{-1}([0,10])$=[-3,0]

პასუხი: [-3,0]

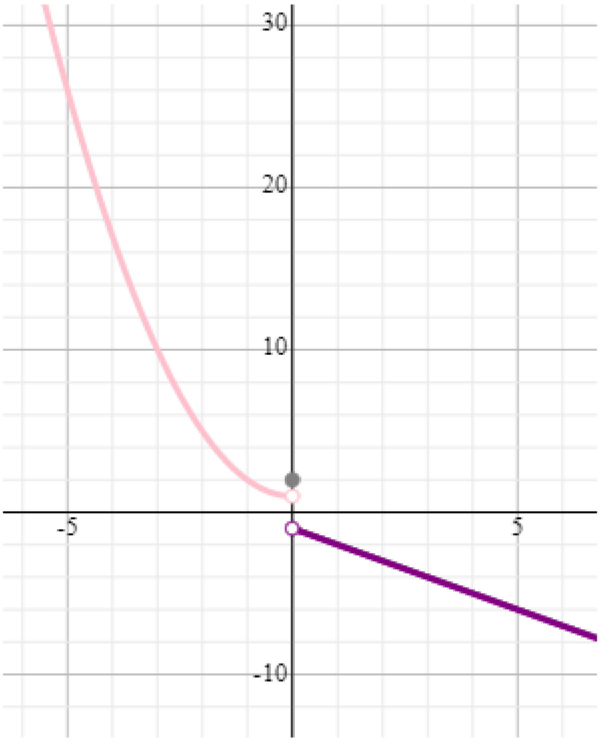
17-ვ.

ვთქვათ, ფუნქცია მოცემულია შემდეგი სახით:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{თუ} \quad x<0 \\ -x-1, \text{თუ} \quad x>0 \\ 2, \text{თუ} \quad x=0 \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი და იპოვეთ $\{x|f(x)\le 2\}$.

ამოხსნა.



როგორც ფუნქციის გრაფიკიდან ჩანს
$\{x|f(x) \leq 2\} = [-1, +\infty)$

პასუხი: $[-1, +\infty)$

20-ა.
იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ $f(x) = 3x - 1$.

ამოხსნა.
ამოვხსნათ $3x - 1 = y$ განტოლება x -ის მიმართ. მივიღებთ: $x = \frac{y+1}{3}$, ანუ $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$.
თუ f^{-1} ფუნქციისათვის დამოუკიდებელ ცვლადად მივიჩნევთ x –ს (y-ის ნაცვლად), გვექნება
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

პასუხი:
$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

20-გ.
იპოვეთ $f^{-1}(x)$, თუ $f(x) = \sqrt{3x+1}$

ამოხსნა.
ამოვხსნათ $\sqrt{3x+1} = y$ განტოლება x -ის მიმართ. ცხადია, რომ $y \geq 0$.
მივიღებთ: $x = \frac{y^2-1}{3}$, $y \geq 0$,
ანუ $f^{-1}(y) = \frac{y^2-1,}{3}$, $y \geq 0$.
თუ f^{-1} ფუნქციისათვის დამოუკიდებელ ცვლადად მივიჩნევთ x –ს (y-ის ნაცვლად), გვექნება
$f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{3}$, $x \geq 0$

პასუხი : $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{3}$, $x \geq 0$